

2025 届高三年级八月智学联考

数 学

命题人：刘静平、曹旗、郑安利；命题学校：黄石二中

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$, $B = \{x | y = \ln(x-1)\}$, 则 $A \cap (C_R B)$ ()
A. $[-1, 1)$ B. $[-1, 1]$ C. $(1, 2]$ D. $(1, +\infty)$
2. 若复数 z 满足 $\frac{1-z}{z-i} = 1+i$, i 为虚数单位, 则 z 在复平面内对应的点位于 ()
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 已知向量 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + 2\vec{b}|$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ ()
A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. 3
4. 若 $\left(3\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^n$ 的二项展开式中, 当且仅当第 5 项是二项式系数最大的项, 则其展开式中 $\frac{1}{x^5}$ 的系数为 ()
A. 8 B. 28 C. 70 D. 252
5. 折扇是我国古老文化的延续, 在我国已有四千年左右的历史, “扇”与“善”谐音, 折扇也寓意“善良”“善行”. 它常以字画的形式体现我国的传统文化, 也是运筹帷幄、决胜千里、大智大勇的象征(如图 1). 图 2 是一个圆台的侧面展开图(扇形的一部分), 若两个圆弧 DE , AC 所在圆台的底面半径分别是 r_1 和 r_2 , 且 $r_1 = 5$, $r_2 = 10$, 圆台的侧面积为 150π , 则该圆台的体积为 ()



图1

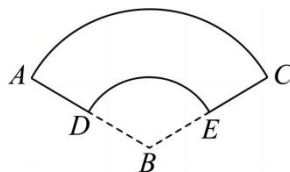


图2

- A. $\frac{35\sqrt{3}\pi}{3}$ B. $\frac{175\sqrt{3}\pi}{3}$ C. $\frac{875\sqrt{3}\pi}{3}$ D. $875\sqrt{3}\pi$
6. 已知函数 $f(x) = 2^{|x+m|}$ ($m \in \mathbf{R}$) 为偶函数, 则 $a = f(\log_2 0.8)$, $b = f(3^{0.2})$, $c = f(\sqrt{3})$ 的大小关系为 ()
A. $a < b < c$ B. $c < a < b$
C. $a < c < b$ D. $b < c < a$
7. 已知函数 $f(x) = 2\cos^2 \omega x - (\sin \omega x - \cos \omega x)^2$ ($\omega > 0$) 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 轴对称, 且 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上没有最小值, 则 ω 的值为 ()
A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2
8. 已知抛物线 $C: x^2 = 12y$ 和圆 $M: x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$, 点 F 是抛物线 C 的焦点, 圆 M 上

的两点 A, B 满足 $AO = 2AF$, $BO = 2BF$, 其中 O 是坐标原点, 动点 P 在圆 M 上运动, 则 P 到直线 AB 的最大距离为 ()

- A. $2 + \sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $4 + \sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

二、多选题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 某公司为保证产品生产质量, 连续 10 天监测某种新产品生产线的次品件数, 得到关于每天出现的次品的件数的一组样本数据: 3, 4, 3, 1, 5, 3, 2, 5, 1, 3, 则关于这组数据的结论正确的是 ()

- A. 极差是 4 B. 众数小于平均数
C. 方差是 1.8 D. 数据的 80% 分位数为 4

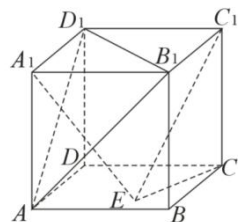
10. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 在矩形 $ABCD$ 内(包括边界)的动点 E 始终满足 D_1E 与平面 $ABCD$ 所成的角是 $\frac{\pi}{4}$, 则下列结论正确的是 ()

- A. 多面体 $B_1C_1D_1 - ABCD$ 的体积为 $\frac{20}{3}$

- B. 动点 E 运动轨迹的长度为 π

- C. 不存在点 E , 使得平面 $AB_1D_1 \parallel$ 平面 DEC_1

- D. 在正四面体 $D_1 - AB_1C$ 的内部有一个可以任意转动的正四面体, 则此四面体的棱长可以是 0.93



11. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数, 其导函数为 $g(x)$, $f(x+2)$ 和 $g(x+1)$ 都是奇函数, $f(1)=1$, 则下列说法正确的是 ()

- A. $g(x)$ 关于点 $(1,0)$ 对称

- B. $f(x) + f(-x) = 0$

- C. $g(2025) = 1$

- D. $\sum_{k=0}^{2024} f(k) = 0$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos A = -\frac{1}{7}$, $AB = 7$, $BC = 8$, 则 $\triangle ABC$ 的面积是_____.

13. 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且满足 $a_n = 4n + 2 - S_{n+1} + S_n$, 则 $a_1 =$ _____.

14. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 的左焦点为 F , 过坐标原点 O 作直线与双曲线的左右两支分别交于 A, B 两点, 且 $|\overline{FB}| = 4|\overline{FA}|$, $\angle AFB = \frac{2\pi}{3}$, 则双曲线的渐近线方程为_____.

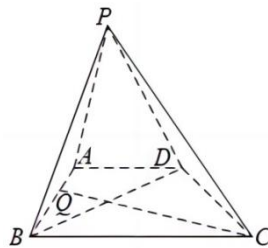
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是直角梯形, $PB=PD$, $AD \parallel BC$, $AB \perp BC$, $AB = \sqrt{3}$, $BC = 2AD = 2$, 平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$, 点 Q 在 AB 上, $PB \perp CQ$.

(1) 求 $AQ:QB$ 的值;

(2) 若四棱锥 $P-ABCD$ 的体积是 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 求二面角 $P-CD-A$ 的余弦值



16. (本小题满分 15 分)

已知函数 $y = f(x) = e^{ax+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) 若 $a = \frac{1}{2}$, 求过原点且与 $y = f(x)$ 相切的切线方程;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) > 2x + e$ 对所有 $x \in (0, +\infty)$ 成立, 求 a 的取值范围.

17. (本小题满分 15 分)

某品牌专卖店统计历史消费数据发现: 进店消费的顾客的消费额 X (单位: 元) 服从正态分布 $N(330, 25^2)$. 为回馈广大顾客, 专卖店对消费达一定金额的顾客开展了品牌知识有奖答题活动, 顾客需要依次回答两类试题, 若顾客答对第一类题, 则回答第二类题, 若顾客没有答对第一类题, 则不再答第二类题, 直接结束有奖答题活动. 对于每一类题, 答错得 0 分, 答对得 10 分, 两类题总分 20 分, 答题结束后可减免与得分相同数额的现金 (单位: 元). 每类试题均有两次答题机会, 在任意一类试题中, 若第一次回答正确, 则认为答对该类试题, 就不再进行第二次答题. 若第一次回答错误, 则进行第二次答题, 若第二次答题正确, 则也认为答对该类试题; 若第二次回答错误, 则认为答错该类试题.

(1) 若某天有 200 位进店消费的顾客, 请估计该天消费额 X 在 $(305, +\infty)$ 内的人数 (结果保留整数);

附: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$.

(2) 某顾客消费达到指定金额后可参与答题活动, A 类题中的两次答题机会答对的概率都是 $\frac{3}{4}$, B 类题中的两次答题机会答对的概率都是 $\frac{2}{3}$, 且每次答题相互独立.

若答题结束后可减免的现金数额为 X 元, 求 X 的分布列和数学期望.

18. (本小题满分 17 分)

椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点到右顶点的距离为 $\sqrt{7}$, 椭圆上的点到焦点的最短距离是 1, 点 A 为椭圆的左顶点, 过点 $P(4, 0)$ 且斜率为 $k (k \neq 0)$ 的直线交椭圆于 B, C 两点.

(1) 求 E 的方程;

(2) 直线 AB , AC 分别交直线 $x=4$ 于 M , N 两点, 且 $|MN|=3\sqrt{5}$, 求直线的斜率 k .

19. (本小题满分 17 分)

若项数为 $m(m \geq 3)$ 的数列 $\{a_n\}$ 满足两个性质: ① $a_1=1, a_i \in \mathbb{N}^*(i=2,3,\dots,m)$; ② 存在

$n \in \{2,3,\dots,m-1\}$, 使得 $\frac{a_{k+1}}{a_k} \in \begin{cases} \{1,2\}, & 1 \leq k \leq n-1 \\ \{1, \frac{1}{2}\}, & n \leq k \leq m-1 \end{cases}$, 并记

$M = \max\{i | a_i \text{ 是 } \{a_k\} \text{ 的最大项}, 1 \leq k \leq n\}$. 则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 Ω .

(1) 若 $m=4, a_4=2$, 写出所有具有性质 Ω 的数列 $\{a_n\}$;

(2) 若 $m=2025, a_{2025}=16$, 求 $\{a_n\}$ 的最大项的最大值;

(3) 若 $a_M=2^{2025}, a_m=1$, 且 $\{a_n\}$ 满足以下两条性质: (i) 对于满足 $1 \leq s < t \leq M$ 的项 a_s 和 a_t , 在 $\{a_n\}$ 的余下的项中, 总存在满足 $1 \leq p < q \leq M$ 的项 a_p 和 a_q , 使得 $a_s \cdot a_t = a_p \cdot a_q$; (ii) 对于满足 $M \leq s < t \leq m$ 的项 a_s 和 a_t , 在 $\{a_n\}$ 的余下的项中, 总存在满足 $M \leq p < q \leq m$ 的项 a_p 和 a_q , 使得 $a_s \cdot a_t = a_p \cdot a_q$. 求满足上述性质的 m 的最小值.