

2025 届高三年级八月智学联考数学答案详解

1. 【答案】B

【详解】解不等式 $x^2 - x - 2 \leq 0$ ，得 $-1 \leq x \leq 2$ ，即 $A = [-1, 2]$ ，函数 $y = \ln(x-1)$ 有意义，得 $x-1 > 0$ ，解得 $x > 1$ ，则 $B = (1, +\infty)$ ， $(\complement_{\mathbb{R}} B) = (-\infty, 1]$ ，所以 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = [-1, 1]$ 。故选：B。

2. 【答案】A

【详解】因为 $\frac{1-z}{z-i} = 1+i$ ，所以 $1-z = (z-i) \cdot (1+i)$ ，即 $(2+i)z = i$ ，所以 $z = \frac{i}{2+i}$
 $= \frac{(i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ ，所以 z 对应的点的坐标为 $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ ，位于第一象限。故选：A。

3. D

【分析】对 $|\vec{a}-\vec{b}| = |\vec{a}+2\vec{b}|$ 两边平方化简可得 $\vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，再对 $|\vec{a}+\vec{b}|$ 平方化简后再开方即可。

【详解】由 $|\vec{a}-\vec{b}| = |\vec{a}+2\vec{b}|$ 两边平方得， $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，

所以 $\vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，所以 $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 = 9$ ，所以 $|\vec{a}+\vec{b}| = 3$ ，故选：D。

4. 【答案】D

【详解】易知 $n=8$ ， $\left(m\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^n$ ($m > 0$) 的展开式的二项式系数之和 $2^n = (m+1)^n$ ， $m=3$ ，则

$\left(3\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^n = \left(3x^{\frac{1}{2}} - x^{-1}\right)^8$ 展开式的通项公式： $C_8^r \times \left(3x^{\frac{1}{2}}\right)^{8-r} \times \left(-x^{-1}\right)^r = C_8^r 3^{8-r} (-1)^r \times x^{\frac{8-3r}{2}}$

令 $\frac{8-3r}{2} = -5$ ， $r=6$ ，所以 $\frac{1}{x^5}$ 的系数为 $C_8^6 \times 3^2 = 252$ 。故选：D。

5. 【答案】C

【详解】 $r_1=5, r_2=10$ ，母线长 $l=10$ 。圆台的高 $h = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$ ，则圆台上下底面面积为 $S_1 = \pi \times 5^2 = 25\pi$ ， $S_2 = \pi \times 10^2 = 100\pi$ ，由圆台的体积计算公式可得：

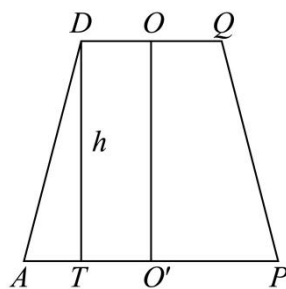
$V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2) \times h = \frac{1}{3} \times 175\pi \times 5\sqrt{3} = \frac{875\sqrt{3}\pi}{3}$ 。故选：C。

6. 【答案】A

【详解】因为函数 $f(x) = 2^{|x+m|}$ ($m \in \mathbb{R}$) 为偶函数，则 $f(-x) = f(x)$ 即 $|x+m| = |-x+m|$ ，即 $4mx = 0$ 对于 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立，所以 $m=0$ ，即 $f(x) = 2^{|x|}$ 。 $a = f(\log_2 0.8) = f(-\log_2 0.8) = f(\log_2 1.25)$ ，因为 $y = 3^x$ 在 $\mathbb{R}$ 内单调

递增，则 $3^{0.5} > 3^{0.2} > 1$ ， $y = \log_2 x$ 在定义域内单调递增，则 $0 = \log_2 1 < \log_2 1.25 < \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2} < 1$ 易知，

$f(x) = 2^{|x|}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，所以 $a < b < c$ 。故选：A。

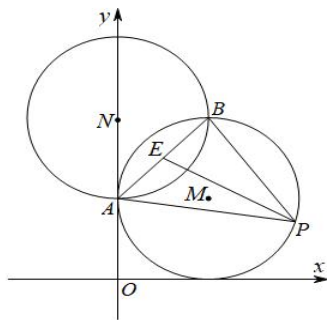


7. 【答案】C

【详解】 $f(x) = 2\cos^2 \omega x + \sin 2\omega x - 1 = \cos 2\omega x + \sin 2\omega x = \sqrt{2} \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$, 因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 轴对称, 所以 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\omega\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \pm\sqrt{2}$, 故 $\frac{\omega\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\omega = 6k + \frac{3}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 当 $2\omega x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, 即 $x = -\frac{3\pi}{8\omega} + \frac{k\pi}{\omega}, k \in \mathbf{Z}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最小值, 因为 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上没有最小值, 所以 $\frac{5\pi}{8\omega} \geq \frac{\pi}{3}$, 即 $\omega \leq \frac{15}{8}$, 由 $\omega = 6k + \frac{3}{2} \leq \frac{15}{8}$, 解得 $k \leq \frac{1}{16}$, 故 $k = 0$, 得 $\omega = \frac{3}{2}$.

8 【答案】A

【详解】抛物线的焦点 $F(0, 3)$, 圆 $M: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$, 其圆心 $M(2, 2)$, 半径 $r_1 = 2$. 设点 $N(x, y)$ 是满足 $NO = 2NF$ 的任意一点, 则 $x^2 + y^2 = 4[x^2 + (y-3)^2]$ 化简得 $x^2 + (y-4)^2 = 4$. 所以 AB 是圆 M 与圆 N 的公共弦, 将圆 M 与圆 N 的方程相减得, 直线 AB 的方程为 $x - y + 2 = 0$, 取线段 AB 的中点 E , 连接 PE , 则 $|ME| = \frac{|2 - 2 + 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 则 $|PE|_{\max} = \sqrt{2} + 2, |PE|_{\min} = 2 - \sqrt{2}$, 故选: A.



9. 【答案】AC

【详解】数据从小到大排列为 1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 5. 对于 A, 该组数据的极差为 $5 - 1 = 4$, 故 A 正确; 对于 B, 众数为 3, 平均数为 $\frac{1 \times 2 + 2 + 3 \times 4 + 4 + 5 \times 2}{10} = 3$, 两者相等, 故 B 错误; 对于 C, $\frac{1}{10}[(1-3)^2 \times 2 + (2-3)^2 \times 1 + (3-3)^2 \times 4 + (4-3)^2 \times 1 + (5-3)^2 \times 2] = 1.8$, 故 C 正确; 对于 D, $\because 10 \times 80\% = 8$, $\therefore$ 这组数据的 80% 分位数为第 8 个数和第 9 个数的平均数 4.5, 故 D 错误. 故选: AC.

10. 【答案】ABD

【详解】 $V_{B_1C_1D_1-ABCD} = V_{\text{正}} - V_{A-A_1B_1D_1} = \frac{20}{3}$, 所以 A 正确. 因为 $D_1D \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $\angle D_1ED$ 是直线 D_1E 与平面 $ABCD$ 所成的角, 依题设, $\angle D_1ED = \frac{\pi}{4} \Rightarrow DE = 2$, 又在矩形 $ABCD$ 内, 所以 B 正确; 当点 E 在对角线 DB 上时, 平面 C_1DE 即为平面 C_1DB , 因为 $C_1D \parallel AB_1$, $C_1D \not\subset$ 平面 AB_1D_1 , 所以 $C_1B \parallel$ 平面 AB_1D_1 , 同理 $C_1E \parallel$ 平面 AB_1D_1 , 又因为 $C_1D \cap C_1B = C_1$, 所以平面 $C_1DB \parallel$ 平面 AB_1D_1 , 故 C 错误; 对于 D: 容易求得正四面体 D_1-AB_1C 的高 $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 设正四面体 D_1-AB_1C 的内切球 O_1 的半径是 r , 则 $V_{D_1-AB_1C} = \frac{1}{3}S_{AB_1C} \cdot h = 4 \times \frac{1}{3}S_{AB_1C} \cdot r$, 所以 $r = \frac{h}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 设半径是 r 的球 O_1 的内接正四面体的边长为 a , 则可将内接正四面体补形成边长为 $\frac{\sqrt{2}a}{2}$ 的正方体, 则 $\frac{\sqrt{6}a}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 解得 $a = \frac{2\sqrt{2}}{3} > 0.93$, 所以 D 正确.

11. ABD 【详解】对于 A: 由 $g(2x+1)$ 为奇函数, 则 $g(2x+1) + g(-2x+1) = 0$,

则 $g(x+1) + g(-x+1) = 0$, 即 $g(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 故 A 正确;

对于 B: 由 $g(x+1)$ 为奇函数, 则 $g(x+1) + g(-x+1) = 0$,

即得 $f(x+1)-f(-x+1)=c$, c 为常数, 令 $x=0$, 即得 $f(1)-f(1)=c$, 则 $c=0$,
故 $f(x+1)-f(-x+1)=0$, 即 $f(x)-f(2-x)=0$, 则 $f(x-2)-f(4-x)=0$,

又 $f(x+2)$ 为奇函数, 所以 $f(x+2)+f(-x+2)=0$,

即 $f(x)+f(4-x)=0$, 可得 $f(x-2)=-f(x)$, 故 $f(x-2)=-f(2-x)$,

故 $f(-x)=-f(x)$, 即 $f(x)+f(-x)=0$, 即 $f(x)$ 是奇函数, 故 B 正确;

对于 C: 由于 $f(x)+f(4-x)=0$, 故 $f(4-x)=-f(x)=f(-x)$, 即 $f(4+x)=f(x)$,
故 4 是 $f(x)$ 的一个周期,

又 $f'(x)-f'(4-x)=0$, 即 $g(x)=g(4-x)$, 所以 $g(x)$ 为周期为 4 的周期函数,

因为 $g(2x+1)+g(-2x+1)=0$, 所以 $g(1)+g(1)=0$, 即 $g(1)=0$,

所以 $g(2025)=g(4 \times 506+1)=g(1)=0$, 故 C 错误;

对于 D: 因为 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 故 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 结合 $f(x)-f(2-x)=0$ 得 $f(2)=0$,
 $f(3)=f(2-3)=f(-1)=-f(1)=-1$, $f(4)=f(0)=0$,

故 $\sum_{k=1}^{2024} f(k)=506[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]=0$, 故 D 正确.

故选: ABD

12. 【答案】 $6\sqrt{3}$

【详解】由余弦定理 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB \cdot AC \cos A$, 得 $64=49+AC^2-14AC \times \left(-\frac{1}{7}\right)$, 解得 $AC=3$ (负值舍), 所以, $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc \sin A=6\sqrt{3}$, 故答案为: $6\sqrt{3}$.

13. 【答案】 2

【详解】由 $a_n=4n+2-S_{n+1}+S_n$, 得 $a_n+a_{n+1}=4n+2$, 又 $a_n=a_1+(n-1)d$, $a_{n+1}=a_1+nd$, 则
 $2a_1+(2n-1)d=4n-2$, 从而 $a_1=2$

【详解】边接 AF_2, BF_2 , 由 A, B 关于原点对称, 可知四边形 FAF_2B 是平行四边形,

即 $|FA|=|F_2B|$, $\angle FBF_2=\frac{\pi}{3}$, 由 $|\overrightarrow{FB}|=4|\overrightarrow{FA}|$ 得: $|\overrightarrow{FB}|=4|\overrightarrow{F_2B}|$,

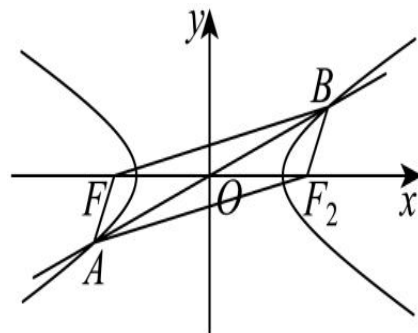
又由双曲线的定义得 $|\overrightarrow{FB}|-|\overrightarrow{F_2B}|=2a$, 解得 $|\overrightarrow{FB}|=\frac{8a}{3}, |\overrightarrow{F_2B}|=\frac{2a}{3}$,

再由余弦定理得: $FF_2^2=FB^2+F_2B^2-2FB \cdot F_2B \cos \angle FBF_2$,

$$4c^2=\frac{64}{9}a^2+\frac{4}{9}a^2-2 \times \frac{8}{3}a \cdot \frac{2}{3}a \cdot \cos \frac{\pi}{3}=\frac{52}{9}a^2,$$

$$\text{即 } e=\frac{\sqrt{13}}{3}, \text{ 再由 } \frac{b}{a}=\sqrt{\frac{c^2-a^2}{a^2}}=\sqrt{e^2-1}=\sqrt{\frac{13}{9}-1}=\frac{2}{3},$$

故渐近线方程为: $y=\pm \frac{2}{3}x$,



15. 【详解】(1) 证明: 过点 P 作直线 $PO \perp BD$ 于点 O , 因为平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$,
 $CQ \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PO \perp CQ$, $PB \perp CQ$, 所以 $CQ \perp BD$. 由四边形 $ABCD$ 是直角梯形, 且

$AB = \sqrt{3}, BC = 2AD = 2, AB \perp BC$. 在直角 $\triangle ABD$ 中, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2$, 可得 $DC = 2, \angle BCD = \frac{\pi}{3}$,

从而 $\triangle BCD$ 是等边三角形, $CQ \perp BD$, $\angle CBD = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\angle BCQ = \frac{\pi}{6}$. 从而

$$BQ = BC \cdot \tan \angle BCQ = 2 \tan \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad AQ = AB - BQ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{所以 } AQ:QB = 1:2 \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 解: 因为 $PB = PD$, 所以 O 是 BD 的中点, 连接 OC .

因为平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PBD \cap$ 平面 $ABCD = BD$, 所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$,

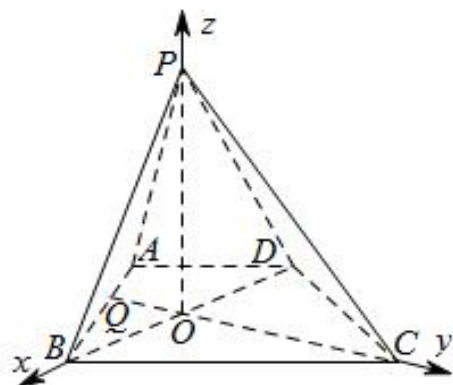
$$V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot PO = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot PO = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \text{所以 } PO = 3.$$

以 O 为原点, 以 OB, OC, OP 所在的直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 在等边 $\triangle BCD$ 中, $OC = \sqrt{3}$, 如图,

$$B(1, 0, 0), C(0, \sqrt{3}, 0), D(-1, 0, 0), P(0, 0, 3), \quad \text{可得}$$

$$\overrightarrow{PD} = (-1, 0, -3), \overrightarrow{PC} = (0, \sqrt{3}, -3), \quad \text{设平面 } PCD \text{ 的一个法向量为}$$

$$\vec{n}_1 = (x, y, z), \quad \text{则} \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{PD} = -x - 3z = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{PC} = \sqrt{3}y - 3z = 0 \end{cases}, \quad \text{解得 } x = -3z, y = \sqrt{3}z,$$



法向量 $\vec{n}_1 = z(-3, \sqrt{3}, 1)$ 令 $z = 1$ 得, $\vec{n}_1 = (-3, \sqrt{3}, 1)$, 而 $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量, 所以二面角

$$P-CD-A \text{ 的余弦值 } \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{13} \cdot 1} = \frac{\sqrt{13}}{13}. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

【备注】几何法给满分

16. 【详解】(1) 若 $a = \frac{1}{2}$, 设切点横坐标是 t , 则切线斜率 $k = f'(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}+1}$, 切线方程是

$$y - e^{\frac{t}{2}+1} = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}+1}(x - t), \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

因为切线过原点, 所以 $0 - e^{\frac{t}{2}+1} = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}+1}(0 - t)$, 解得, $t = 2$, 所以切线方程是 $y = \frac{e^2}{2}x$; $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 首先注意到 $f(0) = e$, $g(x) = e^{ax+1} - 2x + e$, $x > 0$, $g'(x) = ae^{ax+1} - 2$,

①若 $a \leq 0$, 则 $g'(x) < 0$ 在 $x > 0$ 时恒成立, 故 $g(x)$ 单调递减, 则对所有 $x > 0$, $g(x) < g(0) = 0$, 不满足题意, 故舍去; $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

②若 $a > 0$, 则 $g'(x) = a\left(e^{ax+1} - \frac{2}{a}\right)$, 令 $g'(x) < 0$ 得, $x < \frac{1}{a}\left(\ln \frac{2}{a} - 1\right)$; 令 $g'(x) > 0$ 得, $x > \frac{1}{a}\left(\ln \frac{2}{a} - 1\right)$. 所

以, $g(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{1}{a}\left(\ln \frac{2}{a} - 1\right)\right)$ 上单调递减, $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a}\left(\ln \frac{2}{a} - 1\right), +\infty\right)$ 上单调递增.

(i) 若 $0 < a < \frac{2}{e}$, 则 $\ln \frac{2}{a} \geq 1$, 即 $\frac{1}{a}\left(\ln \frac{2}{a} - 1\right) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\left(\ln \frac{2}{a} - 1\right)\right)$ 上单调递减,

$\left(\frac{1}{a}\left(\ln\frac{2}{a}-1\right), +\infty\right)$ 上单调递增, 则 $g(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{a}\left(\ln\frac{2}{a}-1\right)\right) < f(0) = 0$ 不满足题意, 故舍去;

(ii) 若 $a \geq \frac{2}{e}$, 则 $\ln\frac{2}{a} \leq 1$, 即 $\frac{1}{a}\left(\ln\frac{2}{a}-1\right) \leq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则对所有 $x > 0$, $g(x) > f(0) = 0$, 符合题意.

综上所述, a 的取值范围是 $\left[\frac{2}{e}, +\infty\right)$ 15 分

【备注】用切线放缩做, 只要过程严谨, 给满分.

17. 【详解】(1) 由题意 $P(X > 305) = 1 - P(X \leq \mu - \sigma) \approx 1 - \frac{1}{2}(1 - 0.6827) \approx 0.84135$, 若某天该商场有 200 位顾客, 估计该天消费额 X 在 $(305, +\infty)$ 内的人数为 $0.84135 \times 200 = 168.27 \approx 168$; 6 分

(2) 设 X 的取值为 0, 10, 20, 则 $P(X=0) = \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{16}$,

$P(X=10) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{48}$, $P(X=20) = 1 - P(X=0) - P(X=10) = \frac{5}{6}$, 13 分
所以 X 的分布列为

X	0	10	20
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{5}{6}$

数学期望 $E(X) = 0 \times \frac{1}{16} + 10 \times \frac{5}{48} + 20 \times \frac{5}{6} = \frac{425}{24}$ 15 分

【备注】第二问, 讨论 A 为一类或二类给满分, 只要最终结果出现 $\frac{425}{24}$ 就行.

17. 【详解】(1) 由椭圆上的点到焦点的最近距离是 1, 故 $a - c = 1$, 则 $\begin{cases} a - c = 1 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$, 解得 $a = 2$, $b = \sqrt{3}$,

$c = 1$, 即椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$; 5 分

(2) 设 $B(x_1, y_1)$ 、 $C(x_2, y_2)$, 由题可知, $A(-2, 0)$, 则 $k_1 = \frac{y_1}{x_1 + 2}$, $k_2 = \frac{y_2}{x_2 + 2}$, 所以 $k_1 \cdot k_2 = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4}$

①. 由题意, 设 BC 所在的直线方程为 $y = k(x - 4)$, 联立 $\begin{cases} y = k(x - 4) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 可得, $(3 + 4k^2)x^2 - 32k^2x + 64k^2 - 12 = 0$,

且 $\Delta = (-32k^2)^2 - 4(4k^2 + 3)(64k^2 - 12) > 0$,

解得 $0 < |k| < \frac{1}{2}$ 依据韦达定理, $x_1 + x_2 = \frac{32k^2}{3 + 4k^2}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{64k^2 - 12}{3 + 4k^2}$, 7 分

设直线 AB 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$, 直线 AC 的方程为 $y = \frac{y_2}{x_2 + 2}(x + 2)$,

则依题设, $M\left(4, \frac{6y_1}{x_1+2}\right)$, $N\left(4, \frac{6y_2}{x_2+2}\right)$, $y_1=k(x_1-4)$, $y_2=k(x_2-4)$, 则

$$|MN| = \left| \frac{6y_1}{x_1+2} - \frac{6y_2}{x_2+2} \right| = \left| \frac{6y_1x_2+12y_1-6y_2x_1-12y_2}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4} \right| = \left| \frac{36kx_1-36kx_2}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4} \right| = |36k| \times \left| \frac{x_1-x_2}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4} \right|, \quad 10 \text{ 分}$$

$$\text{即 } |MN| = |36k| \times \left| \frac{\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4} \right| = |36k| \times \left| \frac{\sqrt{\frac{1024k^4}{(3+4k^2)} - \frac{256k^2-48}{3+4k^2}}}{\frac{144k^2}{3+4k^2}} \right|, \text{ 化简得}$$

$$|MN| = |36k| \times \left| \frac{\sqrt{144-576k^2}}{144k^2} \right| = 3 \left| \sqrt{\frac{1-4k^2}{k^2}} \right| = 3 \sqrt{\frac{1}{k^2}-4}, \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

依题设, $|MN| = 3\sqrt{\frac{1}{k^2}-4} = 3\sqrt{5}$, 所以 $k = \pm\frac{1}{3}$, 满足 $0 < |k| < \frac{1}{2}$ 合题意. $\dots\dots\dots 16 \text{ 分}$

综上所述, 直线的斜率 $k = \pm\frac{1}{3}$. $\dots\dots\dots 17 \text{ 分}$

【备注】不检验 Δ 扣一分.

19. 【详解】(1) $\{a_n\}$ 有三种结果: 1, 1, 2, 2 或 1, 2, 2, 2 或 1, 2, 4, 2; $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(1) 当 $m=2025$ 时, $n \in \{2, 3, \dots, 2024\}$. 由 $a_1=1, 1 \leq \frac{a_2}{a_1} \leq 2, \dots, 1 \leq \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \leq 2, 1 \leq \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq 2$,

累乘得 $1 \leq a_n \leq 2^{n-1}$ ①; $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

又由 $1 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 2, 1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \leq 2, \dots, 1 \leq \frac{a_{2023}}{a_{2024}} \leq 2, 1 \leq \frac{a_{2024}}{a_{2025}} \leq 2, 1 \leq a_{2025} \leq a_{2025}$,

累乘得 $1 \leq a_n \leq 2^{2025-n} a_{2025}$ ②; $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

将①②相乘得 $1 \leq a_n^2 \leq 2^{2024} a_{2025}$, 又 $a_n \in \mathbf{N}^*$, $a_{2025}=16$, 所以 $1 \leq a_n \leq 2^{1014}$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

所以数列 $\{a_n\}$ 的最大项的最大值为 2^{1014} , 满足条件的数列为

$$a_n = \begin{cases} 2^{n-1} & (n=1, 2, \dots, 1015) \\ 2^{2029-n} & (n=1016, 1017, \dots, 2025) \end{cases}; \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

(3) ①讨论项数满足 $1 \leq k \leq M$ 的情况:

因为数列 $\{a_n\}$ 满足: 当 $1 \leq n \leq M-1$ 时 $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 2$, $a_1=1$, 所以 $0 \leq a_2 \leq 2$,

又因为当 $1 \leq i \leq M-1$, 都有 $a_i \in \mathbf{N}^*$, 所以 $a_2=1$ 或 $a_2=2$, $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

当 $a_2=2$ 时, $a_4 \geq a_3 \geq 2$, 此时 $a_1 \cdot a_2 = 2 < a_3 \cdot a_4$, 这与在剩下的项中总存在满足 $1 \leq p < q \leq M$ 的项 a_p 和 a_q ,

使得 $a_s \cdot a_t = a_p \cdot a_q$ 矛盾, 所以 $a_2=1$, 类似的, 必有 $a_3=1$, $a_4=1$, $a_5=2$, $a_6=2$, $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

由 $a_s \cdot a_t = a_p \cdot a_q$ 得前 6 项任意两项之积小于等于 4 时, 均符合, 要使得 m 值要尽量小, 则需要每项尽可能

大，且则 $a_5 \cdot a_6 = 4 = a_1 \cdot a_7$ ， $a_7 = 2^2$ ，

同理， $a_8 = 2^3$ ， $a_9 = 2^4$ ， $\cdots$ ， $a_{M-6} = 2^{2023}$ ，由对称性得最后 6 项为 $a_M = a_{M-1} = a_{M-2} = a_{M-3} = 2^{2025}$ ，

$a_{M-4} = a_{M-5} = 2^{2024}$ ，..... 14 分

当 $\{a_n\}$ 中间各项为公比为 2 的等比数列时，可使得 M 值最小，且 M 的最小值为 $M_{\min} = 6 + 2022 + 6 = 2034$ ，满足已知条件。

②讨论项数满足 $M \leq k \leq m$ 的情况：

类比①可知 $a_M = a_{M+1} = a_{M+2} = a_{M+3} = 2^{2025}$ ， $a_{M+4} = a_{M+5} = 2^{2024}$ ， $a_{M+6} = 2^{2023}$ ， $a_{M+7} = 2^{2022}$ ， $\cdots$ ， $a_{m-7} = 2^3$ ，

$a_{m-6} = 2^2$ ， $a_{m-5} = 2$ ， $a_{m-4} = 2$ ， $a_{m-3} = a_{m-2} = a_{m-1} = a_m = 2^0 = 1$ 。..... 16 分

综上所述， m 的最小值 $m_{\min} = 2034 \times 2 - 1 = 4067$ 。故答案为：4067。..... 17 分

【备注】1.第一问多写一种情况扣一分；2.第二问不给出数列的构造不扣分；3.计数错了，但是过程正确，酌情扣分；