

2024年秋季高一入学分班考试模拟卷

数 学

(考试时间: 120 分钟 试卷满分: 150 分)

注意事项:

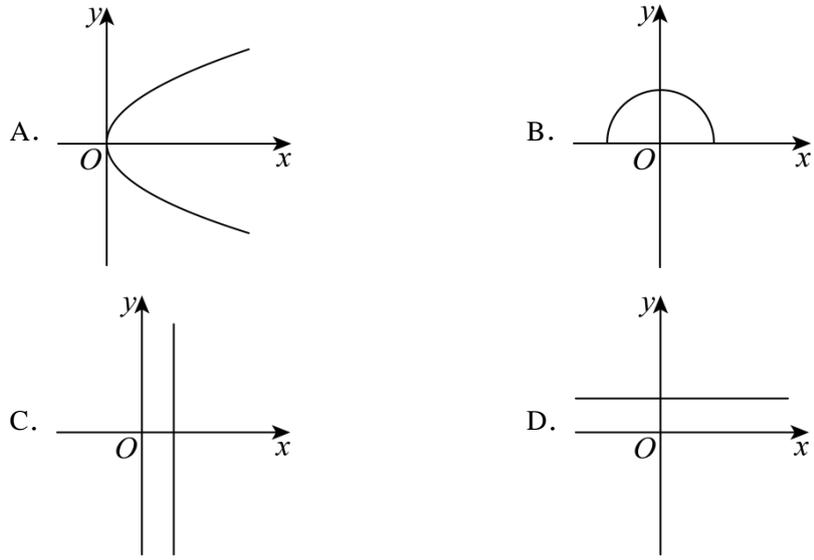
1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的。

1. 若集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$
A. $\{1, 2, 3, 4\}$ B. $\{1, 4\}$ C. $\{2, 3\}$ D. \emptyset
2. 若 $\sqrt{(x-2)^2} = x-2$, 则 x 的值可以是 (\quad)
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
3. “ $x=2$ ”是“ $x^2=4$ ”的 (\quad)
A. 充分必要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象的顶点坐标为 $(2, -1)$, 与 y 轴的交点为 $(0, 11)$, 则 (\quad)
A. $a=3, b=-12, c=11$ B. $a=3, b=12, c=11$
C. $a=3, b=-6, c=11$ D. $a=1, b=-4, c=11$
5. 把 $x^2 - 1 + 2xy + y^2$ 分解因式的结果是 (\quad)
A. $(x+1)(x-1) + y(2x+y)$ B. $(x+y+1)(x-y-1)$
C. $(x-y+1)(x-y-1)$ D. $(x+y+1)(x+y-1)$
6. 已知命题 $P: \exists x > 1, x^2 + 1 > 0$, 则 $\neg P$ 是 (\quad)
A. $\forall x > 1, x^2 + 1 > 0$ B. $\forall x > 1, x^2 + 1 \leq 0$
C. $\exists x > 1, x^2 + 1 \leq 0$ D. $\exists x \leq 1, x^2 + 1 \leq 0$
7. 函数 $y = \frac{x^3 - 1}{\sqrt{9 - x^2}}$ 定义域为 (\quad)
A. $[-3, 3]$ B. $(-3, 1) \cup (1, 3)$ C. $(-3, 3)$ D. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
8. 若实数 $a \neq b$, 且 a, b 满足 $a^2 - 8a + 5 = 0$, $b^2 - 8b + 5 = 0$, 则代数式 $\frac{b-1}{a-1} + \frac{a-1}{b-1}$ 的值为 (\quad)
A. -20 B. 2 C. 2 或 -20 D. 2 或 20

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 下列坐标系中的曲线或直线，能作为函数 $y = f(x)$ 的图象的是 ()



10. 下列命题中是全称量词命题并且是真命题的是 ()

- A. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 1 \geq 0$
- B. $\exists x \in \mathbf{N}, 2x$ 为偶数
- C. 所有菱形的四条边都相等
- D. π 是无理数

11. 下列结论中，错误的结论有 ()

- A. $y = x(4 - 3x)$ 取得最大值时 x 的值为 1
- B. 若 $x < -1$ ，则 $x + \frac{1}{x+1}$ 的最大值为 -2
- C. 函数 $f(x) = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 4}}$ 的最小值为 2
- D. 若 $a > 0, b > 0$ ，且 $a + b = 2$ ，那么 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值为 $3 + 2\sqrt{2}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

- 12. 若多项式 $x^3 + x + m$ 含有因式 $x^2 - x + 2$ ，则 m 的值是_____.
- 13. 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $(1, 2)$ ，则不等式 $cx^2 + bx + a > 0$ 的解集是 (用集合表示) _____.
- 14. 对于每个 x ，函数 y 是 $y_1 = -x + 6, y_2 = -2x^2 + 4x + 6$ 这两个函数的较小值，则函数 y 的最大值是_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分) 解下列不等式：

$$(1) -x^2 + 3x - 2 \geq 0; \quad (2) |x-1| + |x-3| \geq 4; \quad (3) \frac{x-1}{2x+1} \leq 1.$$

16. (15分) 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$, 集合 $B = \{x | -1 - 2a \leq x \leq a - 2\}$.

(1) 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分不必要条件, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若命题“ $\forall x \in B$, 则 $x \in A$ ”是真命题, 求实数 a 的取值范围.

17. (15分) 已知集合 $A = \{x | ax - 1 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 2x + b = 0\}$.

(1) 若 $A \cap B = \{3\}$, 求实数 a, b 的值及集合 A, B ;

(2) 若 $A \neq \emptyset$ 且 $A \cup B = B$, 求实数 a 和 b 满足的关系式.

18. (17分) 已知 $y = x^2 - 2ax + a$.

(1) 设 $a > 0$, 若关于 x 的不等式 $y < 3a^2 + a$ 的解集为 A , $B = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, 且 $x \in A$ 的充分不必要条件是 $x \in B$, 求 a 的取值范围;

(2) 方程 $y = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 ,

① 若 x_1, x_2 均大于 0, 试求 a 的取值范围;

② 若 $x_1^2 + x_2^2 = 6x_1x_2 - 3$, 求实数 a 的值.

19. (17分) 我国是用水相对贫乏的国家, 据统计, 我国的人均水资源仅为世界平均水平的 $\frac{1}{4}$. 因此我国在制定用水政策时明确提出“优先满足城乡居民生活用水”, 同时为了更好地提倡节约用水, 对水资源使用进行

合理配置，对居民自来水用水收费采用阶梯收费。某市经物价部门批准，对居民生活用水收费如下：第一档，每户每月用水不超过20立方米，则水价为每立方米3元；第二档，若每户每月用水超过20立方米，但不超过30立方米，则超过部分水价为每立方米4元；第三档，若每户每月用水超过30立方米，则超过部分水价为每立方米7元，同时征收其全月水费20%的用水调节税。设某户某月用水 x 立方米，水费为 y 元。

(1)试求 y 关于 x 的函数；

(2)若该用户当月水费为80元，试求该年度的用水量；

(3)设某月甲用户用水 a 立方米，乙用户用水 b 立方米，若 a, b 之间符合函数关系： $b = -a^2 + 47a - 530$ 。则当两户用水合计达到最大时，一共需要支付水费多少元？

数学·答案及评分标准

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
C	D	B	A	D	B	C	A

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9	10	11
BD	AC	ABCD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 2

13. $\left\{x \mid \frac{1}{2} < x < 1\right\}$

6

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (13 分)

【解析】(1) $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$ 可化为 $x^2 - 3x + 2 \leq 0$, $\therefore (x-1)(x-2) \leq 0$,

所以解为 $1 \leq x \leq 2$. (3 分)

(2) 当 $x < 1$ 时, 不等式可化为 $-x+1-x+3 \geq 4$, 此时不等式解为 $x \leq 0$;

当 $1 \leq x \leq 3$ 时, 不等式可化为 $x-1-x+3 \geq 4$, 此时不等式无解;

当 $x > 3$ 时, 不等式可化为 $x-1+x-3 \geq 4$, 此时不等式解为 $x \geq 4$;

综上: 原不等式的解为 $x \leq 0$ 或 $x \geq 4$. (9 分)

(3) 原不等式可化为 $\frac{2x+1-x+1}{2x+1} \geq 0$, (11 分)

与 $\begin{cases} (2x+1)(x+2) \geq 0 \\ 2x+1 \neq 0 \end{cases}$ 同解,

所以不等式的解为: $x \leq -2$ 或 $x > -\frac{1}{2}$. (13 分)

16. (15 分)

【解析】(1) 由“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分不必要条件, 得 $A \subsetneq B$, (2 分)

又 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \mid -1-2a \leq x \leq a-2\}$,

因此 $\begin{cases} -1-2a < 1 \\ a-2 \geq 5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1-2a \leq 1 \\ a-2 > 5 \end{cases}$, 解得 $a \geq 7$,

所以实数 a 的取值范围为 $a \geq 7$. (7分)

(2) 命题“ $\forall x \in B$, 则 $x \in A$ ”是真命题, 则有 $B \subseteq A$, (9分)

当 $B = \emptyset$ 时, $-1-2a > a-2$, 解得 $a < \frac{1}{3}$, 符合题意, 因此 $a < \frac{1}{3}$; (11分)

当 $B \neq \emptyset$ 时, 而 $A = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x | -1-2a \leq x \leq a-2\}$,

则 $1 \leq -1-2a \leq a-2 \leq 5$, 无解, (14分)

所以实数 a 的取值范围 $a < \frac{1}{3}$. (15分)

17. (15分)

【解析】(1) 若 $A \cap B = \{3\}$,

则 $3 \in \{x | ax-1=0\}$, $3 \in \{x | x^2-2x+b=0\}$, (2分)

所以 $3a-1=0$, $9-6+b=0$, 解得 $a=\frac{1}{3}$, $b=-3$, (4分)

所以 $A = \{x | ax-1=0\} = \left\{x \mid \frac{1}{3}x-1=0\right\} = \{3\}$, $B = \{x | x^2-2x-3=0\} = \{-1, 3\}$,

综上: $a=\frac{1}{3}$, $b=-3$, $A=\{3\}$, $B=\{-1, 3\}$; (7分)

(2) 若 $A \neq \emptyset$, 则 $a \neq 0$, 此时 $A = \{x | ax-1=0\} = \left\{\frac{1}{a}\right\}$, (9分)

又 $A \cup B = B$, 所以 $A \subseteq B$,

即 $\frac{1}{a} \in \{x | x^2-2x+b=0\}$, (12分)

所以 $\begin{cases} \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} + b = 0 \\ \Delta = 4 - 4b \geq 0 \end{cases}$,

所以实数 a 和 b 满足的关系式为 $b = -\frac{1}{a^2} + \frac{2}{a}$. (15分)

18. (17分)

【解析】(1) 由 $y < 3a^2 + a$, 得 $x^2 - 2ax + a < 3a^2 + a$,

即 $x^2 - 2ax - 3a^2 < 0$, 即 $(x-3a)(x+a) < 0$,

又 $a > 0$, $\therefore -a < x < 3a$, 即 $A = \{x | -a < x < 3a\}$, (3分)

$\therefore x \in A$ 的充分不必要条件是 $x \in B$,

$\therefore B$ 是 A 的真子集,

$$\text{则 } \begin{cases} a > 0 \\ -a < -1, \\ 3a > 2 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a > 0 \\ a > 1, \\ a > \frac{2}{3} \end{cases} \text{ 则 } a > 1,$$

即实数 a 的取值范围是 $a > 1$. (6分)

(2) 方程为 $y = x^2 - 2ax + a = 0$,

①若 x_1, x_2 均大于 0

$$\text{则满足 } \begin{cases} \Delta = 4a^2 - 4a \geq 0 \\ x_1 + x_2 = 2a > 0, \\ x_1 x_2 = a > 0 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a \geq 1 \text{ 或 } a \leq 0 \\ a > 0 \\ a > 0 \end{cases},$$

故 $a \geq 1$, 即 a 的取值范围为 $a \geq 1$. (10分)

②若 $x_1^2 + x_2^2 = 6x_1 x_2 - 3$, 则 $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 6x_1 x_2 - 3$,

则 $(x_1 + x_2)^2 - 8x_1 x_2 + 3 = 0$, 即 $4a^2 - 8a + 3 = 0$, (13分)

即 $(2a-1)(2a-3) = 0$, 解得 $a = \frac{1}{2}$ 或 $a = \frac{3}{2}$,

由 $\Delta \geq 0$, 得 $a \geq 1$ 或 $a \leq 0$.

所以 $a = \frac{3}{2}$, 即实数 a 的值是 $\frac{3}{2}$. (17分)

19. (17分)

【解析】(1) 因为某户该月用水 x 立方米,

按收费标准可知,

当 $0 < x \leq 20$ 时, $y = 3x$;

当 $20 < x \leq 30$ 时, $y = 20 \times 3 + 4(x - 20) = 4x - 20$;

当 $x > 30$ 时, $y = [20 \times 3 + 4 \times (30 - 20) + 7(x - 30)] \times 1.2 = 8.4x - 132$. (5分)

$$\text{所以 } y = \begin{cases} 3x, 0 < x \leq 20 \\ 4x - 20, 20 < x \leq 30 \\ 8.4x - 132, x > 30 \end{cases} \text{ (6分)}$$

(2) 由题可得, 当该用户水费为 80 元时, 处于第二档,

所以 $4x - 20 = 80$, 解得 $x = 25$.

所以该月的用水量为 25 立方米. (10分)

(3) 因为 $b = -a^2 + 47a - 530$,

所以 $a + b = -a^2 + 48a - 530 = -(a - 24)^2 + 46 \leq 46$. (13分)

当 $a = 24$ 时, $(a+b)_{\max} = 46$, 此时 $b = 22$. (15 分)

所以此时两户一共需要支付的水费是 $y = 4 \times 24 - 20 + 4 \times 22 - 20 = 144$ 元. (17 分)