

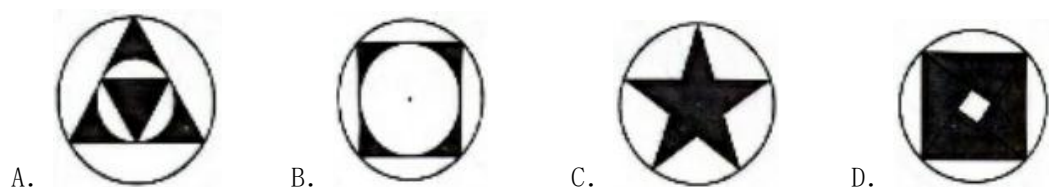
2024 年湖南长沙中考数学试题及答案

注意事项:

1. 答题前, 请考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚, 并认真核对条形码上的姓名、准考证号、考室和座位号;
2. 必须在答题卡上答题, 在草稿纸、试题卷上答题无效;
3. 答题时, 请考生注意各大题题号后面的答题提示;
4. 请勿折叠答题卡, 保持字体工整、笔迹清晰、卡面清洁;
5. 答题卡上不得使用涂改液、涂改胶和贴纸;
6. 本学科试卷共 25 个小题, 考试时量 120 分钟, 满分 120 分。

一、选择题 (在下列各题的四个选项中, 只有一项是符合题意的。请在答题卡中填涂符合题意的选项。本大题共 10 个小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. 下列图形中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



2. 我国近年来大力推进国家教育数字化战略行动, 截至 2024 年 6 月上旬, 上线慕课数量超过 7.8 万门, 学习人次达 1290000000 建设和应用规模居世界第一. 用科学记数法将数据 1290000000 表示为 ()

- A. 1.29×10^8 B. 12.9×10^8 C. 1.29×10^9 D. 129×10^7

3. “玉兔号”是我国首辆月球车, 它和着陆器共同组成“嫦娥三号”探测器. “玉兔号”月球车能够耐受月球表面的最低温度是 -180°C 、最高温度是 150°C , 则它能够耐受的温差是 ()

- A. -180°C B. 150°C C. 30°C D. 330°C

4. 下列计算正确的是 ()

- A. $x^6 \div x^4 = x^2$ B. $\sqrt{5} + \sqrt{6} = \sqrt{11}$ C. $(x^3)^2 = x^5$ D. $(x+y)^2 = x^2 + y^2$

5. 为庆祝五四青年节, 某学校举办班级合唱比赛, 甲班演唱后七位评委给出的分数为: 9.5, 9.2, 9.6, 9.4, 9.5, 8.8, 9.4, 则这组数据的中位数是 ()

- A. 9.2 B. 9.4 C. 9.5 D. 9.6

6. 在平面直角坐标系中, 将点 $P(3,5)$ 向上平移 2 个单位长度后得到点 P' 的坐标为 ()

- A. $(1,5)$ B. $(5,5)$ C. $(3,3)$ D. $(3,7)$

7. 对于一次函数 $y = 2x - 1$, 下列结论正确的是 ()

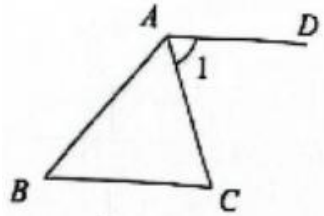
A. 它的图象与 y 轴交于点 $(0, -1)$

B. y 随 x 的增大而减小

C. 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $y < 0$

D. 它的图象经过第一、二、三象限

8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle B = 50^\circ$, $AD \parallel BC$. 则 $\angle 1$ 的度数为 ()



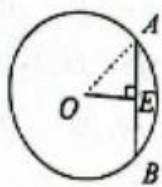
A. 50°

B. 60°

C. 70°

D. 80°

9. 如图, 在 $\odot O$ 中, 弦 AB 的长为 8, 心 O 到 AB 的距离 $OE = 4$, 则 $\odot O$ 的半径长为 ()



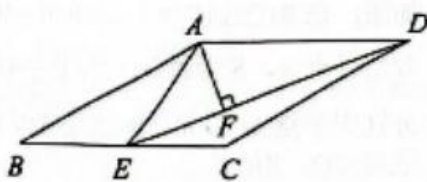
A. 4

B. $4\sqrt{2}$

C. 5

D. $5\sqrt{2}$

10. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $B = 6$, $\angle B = 30^\circ$, 点 E 是 BC 边上的动点, 连接 AE , DE , 过点 A 作 $AF \perp DE$ 于点 F . 设 $DE = x$, $AF = y$, 则 y 与 x 之间的函数解析式为 (不考虑自变量 x 的取值范围) ()



A. $y = \frac{9}{x}$

B. $y = \frac{12}{x}$

C. $y = \frac{18}{x}$

D. $y = \frac{36}{x}$

二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

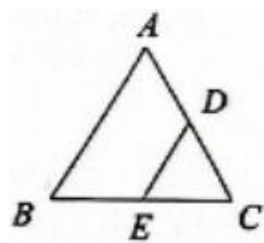
11. 为了比较甲、乙、丙三种水稻秧苗的长势, 每种秧苗各随机抽取 40 株, 分别量出每株高度, 计算发现三组秧苗的平均高度一样, 并且得到甲、乙、丙三组秧苗高度的方差分别是 3.6, 10.8, 15.8, 由此可知____种秧苗长势更整齐 (填“甲”、“乙”或“丙”).

12. 某乡镇组织“新农村, 新气象”春节联欢晚会, 进入抽奖环节. 抽奖方案如下: 不透明的箱子里装有红、黄、蓝三种颜色的球 (除颜色外其余都相同), 其中红球有 2 个, 黄球有 3 个, 蓝球有 5 个, 每次摇匀后从中随机摸一个球, 摸到红球获一等奖, 摸到黄球获二等奖, 摸到蓝球获三等奖, 每个家庭有且只有一次抽奖机会, 小明家参与抽奖, 获得一等奖的概率为_____.

13. 要使分式 $\frac{6}{x-19}$ 有意义, 则 x 需满足的条件是_____.

14. 半径为 4, 圆心角为 90° 的扇形的面积为_____ (结果保留 π).

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别是 AC, BC 的中点, 连接 DE . 若 $DE = 12$, 则 AB 的长为_____.



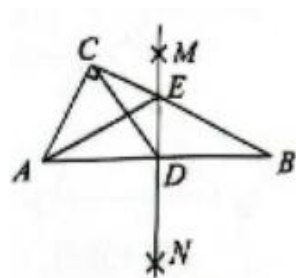
16. 为庆祝中国改革开放 46 周年, 某中学举办了一场精彩纷呈的庆祝活动, 现场参与者均为在校中学生, 其中有一个活动项目是“选数字猜出生年份”, 该活动项目主持人要求参与者从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 这九个数字中任取一个数字, 先乘以 10, 再加上 4, 6, 将此时的运算结果再乘以 10, 然后加上 1978, 最后减去参与者的出生年份 (注: 出生年份是一个四位数, 比如 2010 年对应的四位数是 2010), 得到最终的运算结果. 只要参与者报出最终的运算结果, 主持人立马就知道参与者的出生年份. 若某位参与者报出的最终的运算结果是 915, 则这位参与者的出生年份是_____.

三、解答题 (本大题共 9 个小题, 第 17、18、19 题每小题 6 分, 第 20、21 题每小题 8 分, 第 22、23 题每小题 9 分, 第 24、25 题每小题 10 分, 共 72 分解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 计算: $(\frac{1}{4})^{-1} + |-\sqrt{3}| - 2\cos 30^\circ - (\pi - 6.8)^0$.

18. 先化简, 再求值: $2m - m(m-2) + (m+3)(m-3)$, 其中 $m = \frac{5}{2}$.

19. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 2\sqrt{5}$, $AC = 2$, 分别以点 A, B 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧, 两弧分别交于点 M 和 N , 作直线 MN 分别交 AB, BC 于点 D, E , 连接 CD, AE .



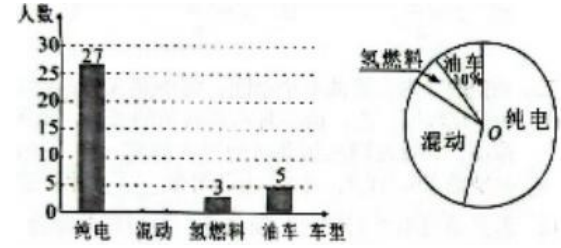
(1) 求 CD 的长;

(2) 求 $\triangle ACE$ 的周长.

20. 中国新能源产业异军突起. 中国车企在政策引导和支持下, 瞄准纯电、混动和氢燃料等多元技术路线, 加大研发投入形成了领先的技术优势, 2023 年, 中国新能源汽车产销量均

突破 900 万辆，连续 9 年位居全球第一。在某次汽车展览会上，工作人员随机抽取了部分参展人员进行了“我最喜欢的汽车类型”的调查活动（每人限选其中一种类型），并将数据整理后，绘制成下面有待完成的统计表、条形统计图和扇形统计图

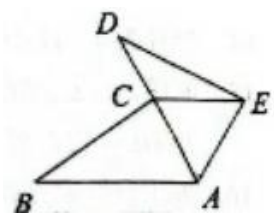
类型	人数	百分比
纯电	m	54%
混动	n	$a\%$
氢燃料	3	$b\%$
油车	5	$c\%$



请根据以上信息，解答下列问题：

- （1）本次调查活动随机抽取了_____人；表中 $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{1cm}}$ ；
- （2）请补全条形统计图；
- （3）请计算扇形统计图中“混动”类所在扇形的圆心角的度数；
- （4）若此次汽车展览会的参展人员共有 4000 人，请你估计喜欢新能源（纯电、混动、氢燃料）汽车的有多少人？

21. 如图，点 C 在线段 AD 上， $AB = AD$ ， $\angle B = \angle D$ ， $BC = DE$ 。

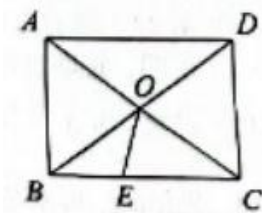


- （1）求证： $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ ；
- （2）若 $\angle BAC = 60^\circ$ ，求 $\angle ACE$ 的度数。

22. 刺绣是我国民间传统手工艺。湘绣作为中国四大刺绣之一，闻名中外，在巴黎奥运会倒计时 50 天之际，某国际旅游公司计划购买 A 、 B 两种奥运主题的湘绣作品作为纪念品。已知购买 1 件 A 种湘绣作品与 2 件 B 种湘绣作品共需要 700 元，购买 2 件 A 种湘绣作品与 3 件 B 种湘绣作品共需要 1200 元。

- （1）求 A 种湘绣作品和 B 种湘绣作品的单价分别为多少元？
- （2）该国际旅游公司计划购买 A 种湘绣作品和 B 种湘绣作品共 200 件，总费用不超过 50000 元，那么最多能购买 A 种湘绣作品多少件？

23. 如图，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 相交于点 O ， $\angle ABC = 90^\circ$ 。



(1) 求证: $AC = BD$;

(2) 点 E 在 BC 边上, 满足 $\angle CEO = \angle COE$. 若 $AB = 6$, $BC = 8$, 求 CE 的长及 $\tan \angle CEO$ 的值.

24. 对于凸四边形, 根据它有无外接圆 (四个顶点都在同一个圆上) 与内切圆 (四条边都与同一个圆相切),

可分为四种类型, 我们不妨约定:

既无外接圆, 又无内切圆的四边形称为“平凡型无圆”四边形;

只有外接圆, 而无内切圆的四边形称为“外接型单圆”四边形;

只有内切圆, 而无外接圆的四边形称为“内切型单圆”四边形;

既有外接圆, 又有内切圆的四边形称为“完美型双圆”四边形.

请你根据该约定, 解答下列问题:

(1) 请你判断下列说法是否正确 (在题后相应的括号中, 正确的打“√”, 错误的打“×”;

① 平行四边形一定不是“平凡型无圆”四边形; ()

② 内角不等于 90° 的菱形一定是“内切型单圆”四边形; ()

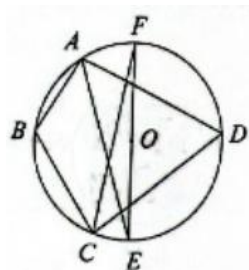
③ 若“完美型双圆”四边形的外接圆圆心与内切圆圆心重合, 外接圆半径为 R , 内切圆半径为 r , 则有 $R = \sqrt{2}r$.

()

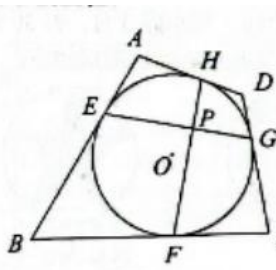
(2) 如图 1, 已知四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 四条边长满足: $AB + CD \neq BC + AD$.

① 该四边形 $ABCD$ 是“_____”四边形 (从约定的四种类型中选一种填入);

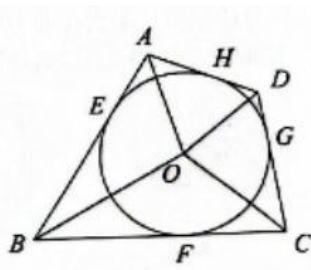
② 若 $\angle BAD$ 的平分线 AE 交 $\odot O$ 于点 E , $\angle BCD$ 的平分线 CF 交 $\odot O$ 于点 F , 连接 EF . 求证: EF 是 $\odot O$ 的直径.



第 24 题图 1



第 24 题图 2



第 24 题图 3

(3) 已知四边形 $ABCD$ 是“完美型双圆”四边形, 它的内切圆 $\odot O$ 与 AB , BC , CD , AD 分别相切于点 E , F , G , H .

① 如图 2. 连接 EG , FH 交于点 P . 求证: $EG \perp FH$;

② 如图 3, 连接 OA , OB , OC , OD , 若 $OA = 2$, $OB = 6$, $OC = 3$, 求内切圆 $\odot O$ 的半径 r

及 OD 的长.

25. 已知四个不同的点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ 都在关于 x 的函数

$y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 的图象上.

(1) 当 A, B 两点的坐标分别为 $(-1, -4)$, $(3, 4)$ 时, 求代数式 $2024a + 1012b + \frac{3}{7}$ 的值;

(2) 当 A, B 两点的坐标满足 $a^2 + 2(y_1 + y_2)a + 4y_1y_2 = 0$ 时, 请你判断此函数图象与 x 轴的公共点的个数, 并说明理由;

(3) 当 $a > 0$ 时, 该函数图象与 x 轴交于 E, F 两点, 且 A, B, C, D 四点的坐标满足:

$2a^2 + 2(y_1 + y_2)a + y_1^2 + y_2^2 = 0$, $2a^2 - 2(y_3 + y_4)a + y_3^2 + y_4^2 = 0$. 请问是否存在实数

$m(m > 1)$, 使得 $AB, CD, m \cdot EF$ 这三条线段组成一个三角形, 且该三角形的三个内角的大小之比为 $1:2:3$? 若存在, 求出 m 的值和此时函数的最小值; 若不存在, 请说明理由 (注: $m \cdot EF$ 表示一条长度等于 EF 的 m 倍的线段).

2024 年长沙市初中学业水平考试

数学参考答案及评分标准

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	C	D	A	B	D	A	C	B	C

二、填空题。（本大题共 6 个小题，每小题 3 分，共 18 分）

11. 甲; 12. $\frac{1}{5}$; 13. $x \neq 19$;

14. 4π ; 15. 24; 16. 2009.

三、解答题（本大题共 9 个小题，第 17、18、19 题每小题 6 分，第 20、21 题每小题 8 分，第 22、23 题每小题 9 分，第 24、25 题每小题 10 分，共 72 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

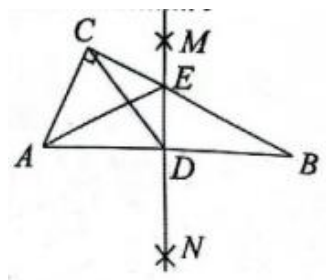
17. 解：原式 $= 4 + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 = 3$.

18. 解：原式 $= 2m - m^2 + 2m + m^2 - 9 = 4m - 9$.

当 $m = \frac{5}{2}$ 时，原式 $= 10 - 9 = 1$.

19. 解：（1）由作图可知， MN 是线段 AB 的垂直平分线，
所以在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，点 D 是斜边 AB 的中点.

所以 $CD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$.



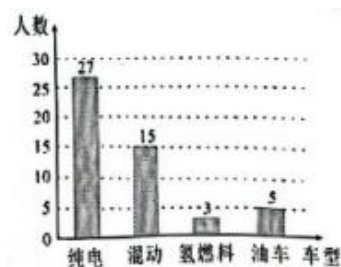
（2）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = \sqrt{16} = 4$.

因为 MN 是线段 AB 的垂直平分线，点 E 在 MN 上，所以 $EA = EB$.

所以 $\triangle ACE$ 的周长 $= AC + CE + EA = AC + CE + EB = AC + BC = 2 + 4 = 6$.

20. 解：（1）50；30，6；

（2）如图所示：



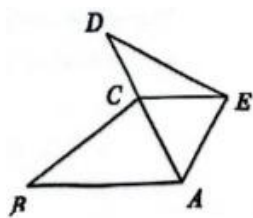
(3) $360^\circ \times 30\% = 108^\circ$.

(4) $4000 \times (54\% + 30\% + 6\%) = 3600$ (人).

答：估计喜欢新能源（纯电、混动、氢燃料）汽车的有 3600 人.

21. 解：(1) 证明：在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 中，

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle B = \angle D, \text{ 所以 } \triangle ABC \cong \triangle ADE (SAS). \\ BC = DE \end{cases}$$



(2) 因为 $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ ，所以 $AC = AE$ ， $\angle CAE = \angle BAC = 60^\circ$.

所以 $\triangle ACE$ 是等边三角形. 所以 $\angle ACE = 60^\circ$.

22. 解：(1) 设 A 种湘绣作品的单价为 x 元，B 种湘绣作品的单价为 y 元. 根据题意，得

$$\begin{cases} x + 2y = 700 \\ 2x + 3y = 1200 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 300, \\ y = 200. \end{cases}$$

答：A 种湘绣作品的单价为 300 元，B 种湘绣作品的单价为 200 元.

(2) 设购买 A 种湘绣作品 a 件，则购买 B 种湘绣作品 $(200 - a)$ 件. 根据题意，得

$$300a + 200(200 - a) \leq 50000, \text{ 解得 } a \leq 100.$$

答：最多能购买 100 件 A 种湘绣作品.

23. 解：(1) 证明：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，且 $\angle ABC = 90^\circ$,

所以四边形 $ABCD$ 是矩形.

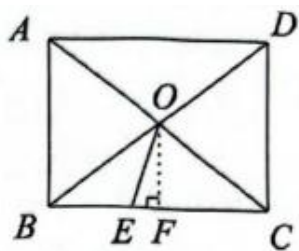
所以 $AC = BD$.

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

所以 $CO = \frac{1}{2} AC = 5$.

因为 $\angle CEO = \angle COE$ ，所以 $CE = CO = 5$.

过点 O 作 $OF \perp BC$ 于点 F .



因为四边形 $ABCD$ 是矩形, 所以 $OB = OC$.

所以 $CF = \frac{1}{2}BC = 4$.

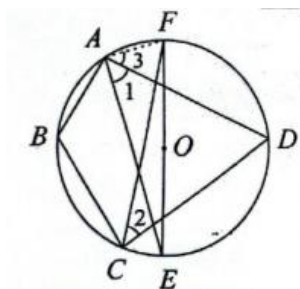
所以 $EF = CE - CF = 5 - 4 = 1$.

在 $\text{Rt}\triangle COF$ 中, $OF = \sqrt{OC^2 - CF^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

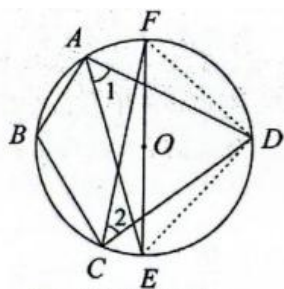
所以 $\tan \angle CEO = \frac{OF}{EF} = 3$.

24. 解: (1) ① ($\times$); ② ($\checkmark$); ③ ($\checkmark$).

(2) ①该四边形 $ABCD$ 是“外接型单圆”四边形;



第 24 题答题图 1



第 24 题答题图 2

②证法 1: 如图 1, 因为 AE 平分 $\angle BAD$, CF 平分 $\angle BCD$,

所以 $\widehat{BE} = \widehat{DE}$, $\widehat{BF} = \widehat{DF}$.

所以 $\widehat{BE} + \widehat{BF} = \widehat{DE} + \widehat{DF}$, 即 $\widehat{EBF} = \widehat{EDF}$.

所以 $\widehat{EBF}$ 与 $\widehat{EDF}$ 均为半圆.

所以 EF 是 $\odot O$ 的直径.

证法 2: 如图 1, 连接 AF .

因为四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 所以 $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$.

因为 AE 平分 $\angle BAD$, CF 平分 $\angle BCD$,

所以 $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle BAD$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\angle BCD$. 所以 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$.

由同弧所对的圆周角相等可得 $\angle 2 = \angle 3$,

所以 $\angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$, 即 $\angle EAF = 90^\circ$.

所以 EF 是 $\odot O$ 的直径.

证法 3: 如图 2, 连接 FD , ED .

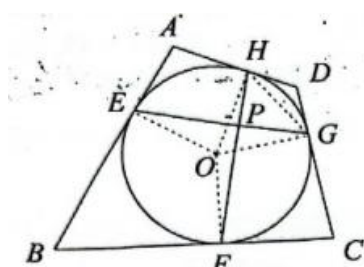
因为四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ，所以 $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ 。

由题意，得 $\angle 1 = \frac{1}{2} \angle BAD$ ， $\angle 2 = \frac{1}{2} \angle BCD$ ，

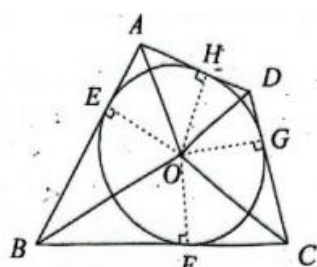
由同弧所对的圆周角相等可得： $\angle EFD = \angle 1$ ， $\angle FED = \angle 2$ ，

所以 $\angle EFD + \angle FED = \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle BCD) = 90^\circ$ ，所以 $\angle FDE = 90^\circ$ 。

所以 EF 是 $\odot O$ 的直径。



第 24 题答题图 3



第 24 题答题图 4

(3) ①证明：如图 3，连接 OE ， OF ， OG ， OH ， HG 。

因为 $\odot O$ 是四边形 $ABCD$ 的内切圆，

所以 $OE \perp AB$ ， $OF \perp BC$ ， $OG \perp CD$ ， $OH \perp AD$ 。

所以 $\angle OEA = \angle OHA = 90^\circ$ 。

所以在四边形 $EAHO$ 中， $\angle A + \angle EOH = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ$ 。

同理可证 $\angle FOG + \angle C = 180^\circ$ 。

因为四边形 $ABCD$ 是“完美型双圆”四边形，

所以四边形 $ABCD$ 有外接圆。

所以 $\angle A + \angle C = 180^\circ$ 。所以 $\angle EOH = \angle C$ 。所以 $\angle FOG + \angle EOH = 180^\circ$ 。

又因为 $\angle FHG = \frac{1}{2} \angle FOG$ ， $\angle EGH = \frac{1}{2} \angle EOH$ ，

所以 $\angle FHG + \angle EGH = 90^\circ$ 。所以 $\angle HPG = 90^\circ$ ，即 $EG \perp FH$ 。

②方法 1：如图 4，连接 OE ， OF ， OG ， OH 。

因为四边形 $ABCD$ 是“完美型双圆”四边形，

所以 $\angle OAH + \angle OAE + \angle OCG + \angle OCF = 180^\circ$ 。

又因为 $\odot O$ 与 AB ， BC ， CD ， AD 分别相切于点 E ， F ， G ， H ，

所以 $\angle OAH = \angle OAE$ ， $\angle OCG = \angle OCF$ 。所以 $\angle OAH + \angle OCG = 90^\circ$ 。

又因为 $\angle COG + \angle OCG = 90^\circ$ ，所以 $\angle OAH = \angle COG$ 。

又因为 $\angle AHO = \angle OGC = 90^\circ$ ，所以 $\triangle AOH \sim \triangle OCG$ 。

所以 $\frac{AO}{OC} = \frac{OH}{CG}$ ，即 $\frac{2}{3} = \frac{r}{CG}$ ，解得 $CG = \frac{3}{2}r$ 。

在 $\text{Rt} \triangle OGC$ 中，有 $OG^2 + CG^2 = OC^2$ ，即 $r^2 + (\frac{3}{2}r)^2 = 3^2$ ，

解得 $r = \frac{6}{13}\sqrt{13}$ 。

在 $\text{Rt}\triangle OBE$ 中, $BE = \sqrt{OB^2 - r^2} = \sqrt{6^2 - \frac{36}{13}} = \frac{12}{13}\sqrt{39}$.

同理可证 $\triangle BEO \sim \triangle OHD$,

所以 $\frac{BE}{OH} = \frac{OB}{OD}$, 即 $\frac{\frac{12}{13}\sqrt{39}}{\frac{6}{13}\sqrt{13}} = \frac{6}{OD}$, 解得 $OD = \sqrt{3}$.

方法 2: 如图 4, 由 $\triangle AOH \sim \triangle OCG$, 得 $\frac{AO}{OC} = \frac{OH}{CG}$,

即 $\frac{2}{3} = \frac{r}{\sqrt{3^2 - r^2}}$, 解得 $r = \frac{6\sqrt{13}}{13}$.

由 $\triangle BEO \sim \triangle OHD$, 得 $\frac{BE}{OH} = \frac{OB}{OD}$,

即 $\frac{\sqrt{36 - \frac{36}{13}}}{\frac{6\sqrt{13}}{13}} = \frac{6}{OD}$, 解得 $OD = \sqrt{3}$.

25. 解: (1) 将 $A(-1, -4)$, $B(3, 4)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ 得

$$\begin{cases} a - b + c = -4, & \text{①} \\ 9a + 3b + c = 4. & \text{②} \end{cases}$$

②-①得 $8a + 4b = 8$, 即 $2a + b = 2$.

所以 $2024a + 1012b + \frac{3}{7} = 1012(2a + b) + \frac{3}{7} = 2024\frac{3}{7}$.

(2) 此函数图象与 x 轴的公共点个数为两个.

方法 1: 由 $a^2 + 2(y_1 + y_2)a + 4y_1y_2 = 0$, 得 $(a + 2y_1)(a + 2y_2) = 0$.

可得 $y_1 = -\frac{a}{2}$ 或 $y_2 = -\frac{a}{2}$.

当 $a > 0$ 时, $-\frac{a}{2} < 0$, 此抛物线开口向上, 而 A, B 两点之中至少有一个点在 x 轴的下方,

此时该函数图象与 x 轴有两个公共点;

当 $a < 0$ 时, $-\frac{a}{2} > 0$, 此抛物线开口下, 而 A, B 两点之中至少有一个点在 x 轴的上方, 此

时该函数图象与 x 轴也有两个公共点.

综上所述, 此函数图象与 x 轴必有两个公共点.

方法 2: 由 $a^2 + 2(y_1 + y_2)a + 4y_1y_2 = 0$, 得 $(a + 2y_1)(a + 2y_2) = 0$.

可得 $y_1 = -\frac{a}{2}$ 或 $y_2 = -\frac{a}{2}$.

所以抛物线上存在纵坐标为 $-\frac{a}{2}$ 的点, 即一元二次方程 $ax^2 + bx + c = -\frac{a}{2}$ 有解.

所以该方程根的判别式 $\Delta = b^2 - 4a(c + \frac{a}{2}) \geq 0$, 即 $b^2 - 4ac \geq 2a^2$.

因为 $a \neq 0$, 所以 $b^2 - 4ac > 0$.

所以原函数图象与 x 轴必有两个公共点.

方法 3: 由 $a^2 + 2(y_1 + y_2)a + 4y_1y_2 = 0$, 可得 $y_1 = -\frac{a}{2}$ 或 $y_2 = -\frac{a}{2}$.

当 $y_1 = -\frac{a}{2}$ 时, 有 $ax_1^2 + bx_1 + c = -\frac{a}{2}$, 即 $ax_1^2 + bx_1 + \frac{a}{2} = -c$,

所以 $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 + 4a(ax_1^2 + bx_1 + \frac{a}{2}) = 2a^2 + (2ax_1 + b)^2 > 0$.

此时该函数图象与 x 轴有两个公共点.

当 $y_2 = -\frac{a}{2}$ 时, 同理可得 $\Delta > 0$, 此时该函数图象与 x 轴也有两个公共点.

综上所述, 该函数图象与 x 轴必有两个公共点.

(3) 因为 $a > 0$, 所以该函数图象开口向上.

由 $2a^2 + 2(y_1 + y_2)a + y_1^2 + y_2^2 = 0$, 得 $(a + y_1)^2 + (a + y_2)^2 = 0$, 可得 $y_1 = y_2 = -a$.

由 $2a^2 - 2(y_3 + y_4)a + y_3^2 + y_4^2 = 0$, 得 $(a - y_3)^2 + (a - y_4)^2 = 0$, 可得 $y_3 = y_4 = a$.

所以直线 AB , CD 均与 x 轴平行.

由 (2) 可知该函数图象与 x 轴必有两个公共点, 设 $E(x_5, 0)$, $F(x_6, 0)$.

由图象可知 $-a > \frac{4ac - b^2}{4a}$, 即 $b^2 - 4ac > 4a^2$.

所以 $ax^2 + bx + c = -a$ 的两根为 x_1, x_2 , 可得 $AB = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{b^2 - 4a(c+a)}}{|a|}$.

同理 $ax^2 + bx + c = a$ 的两根为 x_3, x_4 , 可得 $CD = |x_3 - x_4| = \frac{\sqrt{b^2 - 4a(c-a)}}{|a|}$.

同理 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根为 x_5, x_6 , 可得 $m \cdot EF = m \cdot |x_5 - x_6| = m \cdot \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$.

由于 $m > 1$, 结合图象与计算可得 $AB < EF < m \cdot EF$, $AB < CD$.

若存在实数 $m(m > 1)$, 使得 $AB, CD, m \cdot EF$ 这三条线段组成一个三角形,

且该三角形的三个内角的大小之比为 1: 2: 3, 则此三角形必定为两锐角分别为 $30^\circ, 60^\circ$

的直角三角形，所以线段 AB 不可能是该直角三角形的斜边。

①当以线段 CD 为斜边，且两锐角分别为 30° ， 60° 时，因为 $m \cdot EF > AB$ ，

所以必须同时满足： $AB^2 + (m \cdot EF)^2 = CD^2$ ， $m \cdot EF = \sqrt{3}AB$ 。

将上述各式代入化简可得 $m^2 = \frac{8a^2}{b^2 - 4ac} < \frac{8a^2}{4a^2} = 2$ ，且 $m^2 = \frac{3(b^2 - 4ac - 4a^2)}{b^2 - 4ac}$ ，

联立解之得 $b^2 - 4ac = \frac{20a^2}{3}$ ， $m^2 = \frac{8a^2}{b^2 - 4ac} = \frac{6}{5} < 2$ ，解得 $m = \frac{\sqrt{30}}{5} > 1$ 符合要求。

所以 $m = \frac{\sqrt{30}}{5}$ ，此时该函数的最小值为 $\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-\frac{20a^2}{3}}{4a} = -\frac{5a}{3}$ 。

②当以线段 $m \cdot EF$ 为斜边时，必有 $AB^2 + CD^2 = (m \cdot EF)^2$ ，同理代入化简可得

$2(b^2 - 4ac) = m^2(b^2 - 4ac)$ ，解得 $m = \sqrt{2}$ 。

因为以线段 $\sqrt{2}EF$ 为斜边，且有一个内角为 60° ，而 $CD > AB$ ，

所以 $CD = AB \cdot \tan 60^\circ$ ，即 $\sqrt{b^2 - 4a(c - a)} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{b^2 - 4a(c + a)}$ ，

化简得 $b^2 - 4ac = 8a^2 > 4a^2$ 符合要求。

所以 $m = \sqrt{2}$ ，此时该函数的最小值为 $\sqrt{\frac{4ac - b^2}{4a}} = \frac{-8a^2}{4a} = -2a$ 。

综上所述，存在两个 m 的值符合题意：

当 $m = \frac{\sqrt{30}}{5}$ 时，此时该函数的最小值为 $-\frac{5a}{3}$ ；

当 $m = \sqrt{2}$ 时，此时该函数的最小值为 $-2a$ 。