第 5 讲 充分条件与必要条件

一、命题

1. 命题的概念：一般地，我们把用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫做命题.其中判断为真的语句叫做**真命题**，判断为假的语句叫做**假命题**.

2. 命题的形式：数学中命题常写成**"若 p，则 q"**或者**"如果 p，那么 q"**，通常我们把命题中的 p 叫做命题的条件，q 叫做命题的结论.

3. 四种命题：

（1）对于两个命题，如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件，那么我们把这样的两个命题叫作**互逆命题**，其中一个命题叫作**原命题**，另一个命题叫作原命题的**逆命题**. 原命题为"若 p，则 q"，则逆命题为"若 q，则 p".

*（2）一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的条件的否定和结论的否定，我们把这样的两个命题叫作**互否命题**，如果把其中一个命题叫作原命题，那么另一个命题叫作原命题的**否命题**. 原命题为"若 p，则 q"，则否命题为"若 $\neg p$，则 $\neg q$".

（3）一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的结论的否定和条件的否定，我们把这样的两个命题叫作**互为逆否命题**，如果把其中一个命题叫作原命题，那么另一个命题叫作原命题的**逆否命题**. 若原命题为"若 p，则 q"，则逆否命题为"若 $\neg q$，则 $\neg p$".

二、充分条件和必要条件

1. 定义：一般地，"若 p，则 q"为真命题，是指由 p 通过推理可以得出 q.这时我们就说，由 p 可以推出 q，记作 $p \Rightarrow q$.并且说，p 是 q 的**充分条件**，q 是 p 的**必要条件**.

相反，"若 p，则 q"为假命题，那么由条件 p 不能推出结论 q，记作 $p \nRightarrow q$.此时，我们就说 p 不是 q 的充分条件，q 不是 p 的必要条件.

2. 充要条件：如果"若 p，则 q"和它的逆命题"若 q，则 p"均是真命题，即既有 $p \Rightarrow q$，又有 $q \Rightarrow p$，就记作 $p \Leftrightarrow q$.此时，p 既是 q 的充分条件，也是 q 的必要条件，我们说 p 是 q 的充分必要条件，简称**充要条件**.

重点剖析：

1．对充分条件的理解

(1) 设集合 $A=\{x|x满足条件p\}$，$B=\{x|x满足条件q\}$.

若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件；若 $A\not\subseteq B$，则 p 不是 q 的充分条件.

(2) 我们说 p 是 q 的充分条件，是指由条件 p 可以推出结论 q，但并不意味着只能由这个条件 p 才能推出结论 q，一般来说，对给定的结论 q，使得 q 成立的条件 p 是不唯一的. 例如：$x=6\Rightarrow x^2=36$. 但是，当 $x\neq 6$ 时，$x^2=36$ 也可以成立，故“$x\neq 6$”是“$x^2=36$”的充分条件.

2．对必要条件的理解

（1）设集合 $A=\{x|x满足条件p\}$，$B=\{x|x满足条件q\}$.

若 $A\supseteq B$，则 p 是 q 的必要条件；若 $A\not\supseteq B$，则 p 不是 q 的必要条件.

（2）我们说 q 是 p 的必要条件，是指以 p 为条件可以推出结论 q，但并不意味着由条件 p 只能推出结论 q. 一般来说，对给定的条件 p，由 p 可以推出的结论 q 是不唯一的. 例如：若四边形是平行四边形，则这个四边形的两组对边分别相等. 另外，若四边形是平行四边形，则这个四边形的一组对边平行且相等. 显然这两个命题都是正确的.

3. 证明命题充要性时，既要证明原命题成立（充分性），又要证明它的逆命题成立（必要性）.

例 1.　判断下列说法是否是命题. 如果是命题，判断其真假.

（1）$x>6$；

（2）垂直于同一条直线的两条直线平行么？

（3）$2+4=7$；

（4）武汉市坐落于湖北省；

（5）若两个三角形的周长相等，则这两个三角形全等.

例 2.　　把下列命题写成“若 p ，则 q ”的形式,并判断其真假.

(1) 实数的平方是非负数；

(2) 底边相等且高相等的两个三角形是全等三角形；

(3) 能被 6 整除的数既能被 3 整除也能被 2 整除；

(4) 弦的垂直平分线经过圆心,并平分弦所对的弧.

例 3.　　下列“若 p ，则 q ”形式的命题中，哪些命题中的 p 是 q 的充分条件？

（1）若四边形的两组对角分别相等，则这个四边形是平行四边形；

（2）若两个三角形的三边成比例，则这两个三角形相似；

（3）若四边形为菱形，则这个四边形的对角线互相垂直；

（4）若 $x^2=1$ ，则 $x=1$ ；

（5）若 $a=b$ ，则 $ac=bc$ ；

（6）若 x,y 为无理数，则 xy 为无理数.

例 4.　　下列“若 p ，则 q ”形式的命题中，哪些命题中的 q 是 p 的必要条件？

（1）若四边形为平行四边形，则这个四边形的两组对角分别相等；

（2）若两个三角形相似，则两个三角形的三边成比例；

（3）若四边形的对角线互相垂直，则这个四边形为菱形；

（4）若 $x=1$ ，则 $x^2=1$ ；

（5）若 $ac=bc$ ，则 $a=b$ ；

（6）若 xy 为无理数，则 x,y 为无理数.

例 5.　下列各题中，哪些 p 是 q 的充要条件？

（1）p：四边形是正方形，q：四边形的对角线互相垂直且平分；

（2）p：两个三角形相似，q：两个三角形三边成比例；

（3）p：$xy>0$；，q：$x>0, y>0$；

（4）p：$x=1$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，q：$a+b+c=0(a\neq 0)$.

例 6.　设 $p:|4x-3|\le 1$，$q:x^2-(2a+1)x+a^2+a\le 0$. 若 p 是 q 的充分不必要条件，求实数 a 的取值范围.

例 7.　求证：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一正根和一负根的充要条件是 $ac<0$.

例 8.　求关于 x 的一元二次不等式 $ax^2+1>ax$ 对于一切实数 x 都成立的充要条件.

例 9.　已知全集$U=R$，非空集合$A=\left\{x\middle|\frac{x-2}{x-3}<0\right\}$，$B=\left\{x\middle|(x-a)(x-a^{2}-2)<0\right\}$.

（1）当$a=\frac{1}{2}$时，求$(C_{U}B)\cup A$；

（2）命题$p:x\in A$，命题$q:x\in B$，若q是p的必要不充分条件，求实数a的取值范围.

跟踪训练

1. “$\left(2x-1\right)x=0$”是“$x=0$”的（　　）

A. 充分不必要条件　B.必要不充分条件　C.充要条件　D.既不充分也不必要条件

2. 设$x\in R$，则“$x^2-5x<0$”是“$\left|x-1\right|<1$”的（　　）

A.充分不必要条件　B.必要不充分条件　C.充要条件　D.既不充分也不必要条件

3. 设$p:-2<x<4$，$q:\left(x+2\right)\left(x+a\right)<0$；若$q$是$p$的必要不充分条件，则实数$a$应满足（　）

A. $a>4$　B. $a<-4$　C. $a\le -4$　D. $a\ge 4$

4. 设p:实数x满足$x^2-4ax+3a^2<0$（其中$a>0$），$q:2<x\le 3$. 若p是q的必要不充分条件，则实数a的取值范围是__________ .

5. 已知$P=\{x|a-4<x<a+4\}$，$Q=\{x|1<x<3\}$. “$x\in P$”是“$x\in Q$”的必要条件，则实数a的取值范围是__________ .

6. 已知条件$p:x^2-3x-4\le 0$，条件$q:x^2-6x+9-m^2\le 0$. 若p是q的充分不必要条件，求实数m的取值范围.

7. 已知x,y是非零实数，且$x>y$，求证：$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$的充要条件为$xy>0$.